

2019年天津河东区高三二模理科数学试卷

一、选择题

(本大题共8小题，每小题5分，共40分)

1. 已知集合 $M = \{x|x < 1\}$, $N = \{x|x^2 - x < 0\}$, 则 () .

- A. $M \cap N = \{x|x < 1\}$
- B. $M \cup N = \{x|x > 0\}$
- C. $M \subseteq N$
- D. $N \subseteq M$

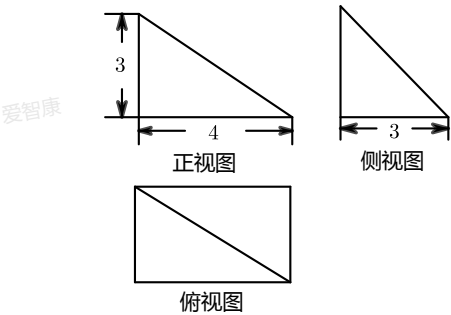
2. 已知 $a \in \mathbf{R}$, $\frac{a + 2i}{1 + i} + i \in \mathbf{R}$, 则 $a = ()$.

- A. 4
- B. 3
- C. 2
- D. 1

3. 设 $\{a_n\}$ 是首项为正数的等比数列 , 公比为 q , 则 “ $q > 0$ ” 是 “对任意的正整数 n , $a_{2n-1} + a_{2n} > 0$ ” 的 () .

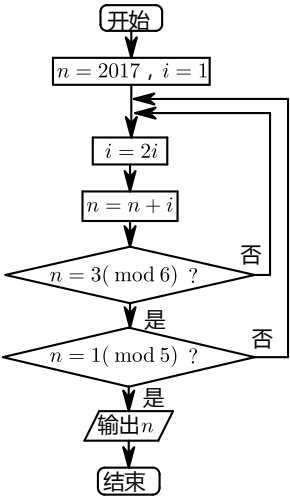
- A. 充要条件
- B. 充分而不必要条件
- C. 必要而不充分条件
- D. 既不充分也不必要条件

4. 一个棱锥的三视图如图所示 , 则该棱锥的外接球的表面积为 () .



- A. 32π
- B. 34π
- C. 36π
- D. 38π

5. 若正整数 N 除以正整数 m 后的余数为 n , 则记为 $N \equiv n \pmod{m}$, 例如 $83 \equiv 5 \pmod{6}$. 执行如图所示的程序框图 , 则输出的结果为 () .



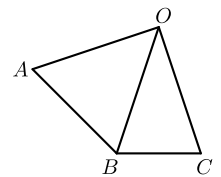
- A. 2019
- B. 2023
- C. 2031
- D. 2047

6. 已知函数 $f(x) = \sin \omega x - \sqrt{3} \cos \omega x (\omega > 0)$ 的图象与 x 轴的两个相邻交点的距离等于 $\frac{\pi}{4}$, 若将函数 $y = f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位得到函数 $y = g(x)$ 的图象, 则在下列区间中使 $y = g(x)$ 是减函数的是 ().
- A. $(-\frac{\pi}{3}, 0)$ B. $(\frac{\pi}{24}, \frac{7\pi}{24})$ C. $(0, \frac{\pi}{3})$ D. $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3})$
7. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 在左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 以 O 为圆心, 以 $|F_1 O|$ 为半径的圆与该双曲线的两条渐近线在 y 轴左侧交于 A, B 两点, 且 $\triangle F_2 AB$ 是等边三角形. 则双曲线的离心率为 ().
- A. 2 B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3} + 1$ D. $\sqrt{3} + 2$
8. 函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 对任意两个正数 $x_1, x_2, (x_1 < x_2)$, 都有 $\frac{f(x_1)}{x_1} > \frac{f(x_2)}{x_2}$, 记 $a = 25f(0.2^2), b = f(1), c = -\log_5 3 f(\log_{\frac{1}{3}} 5)$, 则 a, b, c 大小关系为 ().
- A. $c > b > a$ B. $b > c > a$ C. $a > b > c$ D. $a > c > b$

二、填空题

(本大题共6小题, 每小题5分, 共30分)

9. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x \geq 0 \\ x + y - 3 \geq 0 \\ x - 2y \leq 0 \end{cases}$, 则 $z = x + 2y$ 的取值范围是 _____.
10. 在 $(2 - x)(1 + 2x)^5$ 的展开式中, x^2 的系数为 _____.
11. 已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = 3t \\ y = 4t + m \end{cases} (t \text{ 为参数})$, 圆 C 的极坐标方程为 $\rho = 2 \cos \theta$, 若直线 l 与圆 C 相交所得弦长为 $\sqrt{3}$, 则 m 的值为 _____.
12. 函数 $f(x) = a^{x-1} - 2 (a > 0, a \neq 1)$ 的图象恒过定点 A , 若点 A 在直线 $mx - ny - 1 = 0$ 上, 其中 $m > 0, n > 0$, 则 $\frac{1}{m} + \frac{2}{n}$ 的最小值为 _____.
13. 如图, 已知 $OA = OB = OC, AB = 2, \angle ABC = 135^\circ, \vec{OA} \cdot \vec{OB} = 2$, 则 $\vec{OB} \cdot \vec{OC} =$ _____.



14. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\ln x|, 0 < x \leq e \\ f(2e - x), e < x < 2e \end{cases}$, 函数 $F(x) = f(x) - ax$ 有4个零点, 则实数 a 的取值范围是 _____.

三、解答题

(本大题共6小题, 共80分)

15. 某项竞赛分为初赛、复赛、决赛三个阶段进行, 每个阶段选手要回答一个问题. 规定正确回答问题者进入下一阶段竞赛, 否则即遭淘汰. 已知某选手通过初赛、复赛、决赛的概率分别是 $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ 且各阶段通过与否相互独立.
- (1) 求该选手在复赛阶段被淘汰的概率.
- (2) 设该选手在竞赛中回答问题的个数为 ξ , 求 ξ 的分布列与均值.
16. 已知函数 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 2\sin^2 x$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期和单调递减区间.

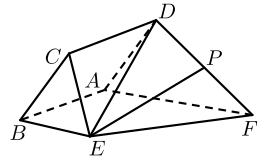
(2) 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是角 A, B, C 的对边, 若 $f\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{3}{2}$, $b+c=7$, $\triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{3}$, 求边 a 的值.

爱智康

爱智康

爱智康

17. 如图, 已知菱形 $ABCD$ 与直角梯形 $ABEF$ 所在的平面互相垂直, 其中 $BE \parallel AF$, $AB \perp AF$, $AB = BE = \frac{1}{2}AF = 2$, $\angle CBA = \frac{\pi}{3}$, P 为 DF 的中点.



爱智康

爱智康

爱智康

(1) 求证: $PE \parallel$ 平面 $ABCD$.

(2) 求二面角 $D-EF-A$ 的余弦值.

(3) 设 G 为线段 AD 上一点, $\overrightarrow{AG} = \lambda \overrightarrow{AD}$, 若直线 FG 与平面 $ABEF$ 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{39}}{26}$, 求 AG 的长.

爱智康

爱智康

爱智康

18. 已知单调递增的等比数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_2 + a_3 + a_4 = 28$, 且 $a_3 + 2$ 是 a_2, a_4 的等差中项.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

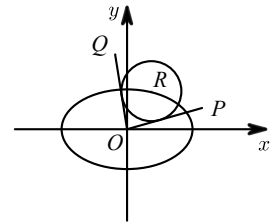
(2) 若 $b_n = a_n \log_{\frac{1}{2}} a_n$, $S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n$, 对任意正整数 n , $S_n + (n+m)a_{n+1} < 0$ 恒成立, 试求 m 的取值范围.

爱智康

爱智康

爱智康

19. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知 $R(x_0, y_0)$ 是椭圆 $C: \frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{12} = 1$ 上的一点, 从原点 O 向圆 $R: (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = 8$ 作两条切线, 分别交椭圆于点 P, Q .



爱智康

爱智康

爱智康

(1) 若 R 点在第一象限, 且直线 OP, OQ 互相垂直, 求圆 R 的方程.

(2) 若直线 OP, OQ 的斜率存在, 并记为 k_1, k_2 , 求 $k_1 \cdot k_2$ 的值.

(3) 试问 $OP^2 + OQ^2$ 是否为定值? 若是, 求出该值; 若不是, 说明理由.

爱智康

爱智康

爱智康

20. 设函数 $f(x) = x^2 - 2x + a \ln x (a \in \mathbf{R})$.

(1) 当 $a = 2$ 时, 求函数 $f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处切的切线方程.

(2) 若函数 $f(x)$ 存在两个极值点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$,

① 求实数 a 的范围.

② 证明: $\frac{f(x_1)}{x_2} > -\frac{3}{2} - \ln 2$.

爱智康

爱智康

爱智康

爱智康

爱智康

爱智康

爱智康

爱智康

爱智康